7.5.19 Hledání hyperbol

Předpoklady: 7516, 7517, 7518

Pedagogická poznámka: Některé příklady jsou zdlouhavější, pokud mám dostatek času probírám tuto a následující hodinu během tří vyučovacích hodin.

Př. 1: Napiš rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $E[-5;3]$, $F[7;3]$ a hlavní poloosu o délce 5.

Střed hyperboly je středem úsečky $EF \Rightarrow S[1;3]$.
Úsečka EF je rovnoběžná s osou $x \Rightarrow$ hlavní poloosou je $a=5$.
Excentricita je vzdálenost ohniska od středu $e=|SE|=6$.
Určíme vedlejší poloosu: $e^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{e^2-a^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$.
Rovnice hyperboly: $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-3)^2}{11}=1$

Př. 2: Najdi rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $E[2;-3]$, $F[2;1]$.

Střed hyperboly je středem úsečky $EF \Rightarrow S[2;-1]$.
Úsečka EF je rovnoběžná s osou $y \Rightarrow$ hlavní poloosou je b.
Excentricita je vzdálenost ohniska od středu $e=|SE|=2$.
Hyperbola je rovnoosá $\Rightarrow$ platí $a=b$.
Určíme poloosy: $e^2=a^2+b^2$, dosadíme $a=b$: $e^2=2a^2 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{e^2}{2}}=\sqrt{\frac{2^2}{2}}=\sqrt{2}$
Rovnice hyperboly: $\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2}=1$.

Pedagogická poznámka: Největším problémem je význam termínu rovnoosá hyperbola. Chci, aby jej studenti našli ve svých poznámkách.

Př. 3: Osy hyperboly jsou shodné s osami soustavy souřadnic, excentricita se rovná 5 a hyperbola prochází bodem $M[3;-4]$. Urči její rovnici.

Nevíme, která ze souřadných os je hlavní osou hledané hyperboly $\Rightarrow$ dvě možnosti.
Hlavní osou hyperboly je osa x $\Rightarrow$ hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
Dvě neznámé, máme jediný bod na dosazování $\Rightarrow$ potřebujeme další rovnici, použijeme informaci o excentricitě: $e=5 \Rightarrow a^2+b^2=25 \Rightarrow b^2=25-a^2$.
Dosadíme do rovnice: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$.

Dosadíme bod $M[3;-4]$: $\frac{3^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{25-a^2}=1 \quad / \cdot a^2\left(25-a^2\right)$.

$9\left(25-a^2\right)-16a^2=a^2\left(25-a^2\right)$

$225-9a^2-16a^2=25a^2-a^4$

$a^4-50a^2+225=0$ provedeme substituci $a^2=k$.

$k^2-50k+225=0$

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-50)\pm\sqrt{(-50)^2-4\cdot1\cdot225}}{2\cdot1}=\frac{50\pm40}{2}$$

Dvě řešení:

- $k_1=\frac{50+40}{2}=45 \Rightarrow a_1^2=45 \Rightarrow b^2=25-a^2=25-45=-20$ nesmysl $\Rightarrow a_1^2=45$ není řešení.
- $k_2=\frac{50-40}{2}=5 \Rightarrow a_2^2=5 \Rightarrow b^2=25-a^2=25-5=20 \Rightarrow a^2=5$ je řešení.

Hledaná hyperbola má v případě, že její hlavní osa je totožná s osou *x* rovnici $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

Teď druhá možnost: **Hlavní osou hyperboly je osa *y*** $\Rightarrow$ hyperbola má rovnici $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Opět dosadíme za *b*: $b^2=25-a^2$ do rovnice: $\frac{y^2}{25-a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Dosadíme bod $M[3;-4]$: $\frac{(-4)^2}{25-a^2}-\frac{3^2}{a^2}=1 \quad / \cdot a^2\left(25-a^2\right)$.

$16a^2-9\left(25-a^2\right)=a^2\left(25-a^2\right)$

$16a^2-225+9a^2=25a^2-a^4$

$a^4-225=0$ platí: $\sqrt{225}=15$

$a^4-15^2=0$

$\left(a^2-15\right)\left(a^2+15\right)=0$

Dvě řešení:

- $a_1^2=15 \Rightarrow b^2=25-a^2=25-15=10 \Rightarrow a^2=15$ je řešení.
- $a_2^2=-15 \Rightarrow$ nesmysl, druhá mocnina nemůže být záporná.

Hledaná hyperbola má v případě, že její hlavní osa je totožná s osou *y* rovnici $\frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{15}=1$.

Pedagogická poznámka: Jen málokterý student přijde i po upozornění na to, že hledaná hyperbola může mít svislou hlavní osu a je tedy třeba dosazovat i do rovnice $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Nemá cenu nechávat studenty na tomto místě příliš dlouho stát.

Př. 4: Napiš rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je shodná s osou *x* a vedlejší s osou *y* a která prochází body $M\left[2;\sqrt{6}\right]$ a $N\left[\sqrt{3};2\right]$.

Hyperbola má rovnici: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ máme dvě neznámé, ale můžeme dosazovat dva body $\Rightarrow$ řešíme soustavu dvou rovnic.

Dosadíme bod $M\left[2;\sqrt{6}\right]$: $\frac{2^2}{a^2}-\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2$.

Dosadíme bod $N\left[\sqrt{3};2\right]$: $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}-\frac{2^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2$.

$4b^2-6a^2=a^2b^2$

$3b^2-4a^2=a^2b^2$ provedeme substituci: $a^2=x, b^2=y$

$4y-6x=xy$

$3y-4x=xy$

Od první rovnice odečteme druhou: $y-2x=0 \Rightarrow y=2x$.

Dosadíme do první rovnice: $4\cdot 2x-6x=x\cdot 2x$.

$2x=2x^2$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

- $x_1=a_1^2=0$ nesmysl, poloosa nemůže být nulová.
- $x_2=1=a^2$ rozumný výsledek $y=2x=2\cdot 1=2=b^2$.

Hledaná hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$.

Pedagogická poznámka: Ještě výhodnější substitucí je $\frac{1}{a^2}=x$, $\frac{1}{b^2}=y$.

Př. 5: Napiš rovnici hyperboly, jestliže její asymptoty mají rovnice $y=\pm 2x-1$ a ohnisko je v bodě $F[5;-1]$.

Potřebujeme určit střed hyperboly. Střed hyperboly je průsečíkem asymptot $\Rightarrow$ hledáme společný bod přímek $y=2x-1$ a $y=-2x-1$ $\Rightarrow$ srovnávací metoda $2x-1=-2x-1$.

$4x=0$ $\quad x=0$ $\quad y=2x-1=2\cdot 0-1=-1$

Asymptoty se protínají v bodě $S[0;-1]$, který je středem hyperboly.

Známe excentricitu: $e=|SF|=5$.

Velikosti poloos udávají směrnice asymptot $\Rightarrow$ $\frac{b}{a}=k=2 \Rightarrow b=2a$.

Dosadíme do vztahu mezi poloosami a excentricitou:

$e^2=5^2=a^2+b^2=a^2+(2a)^2=5a^2$

$a^2=5 \Rightarrow a=\sqrt{5}$

$b=2a=2\sqrt{5}$

Rovnice hledané hyperboly: $\frac{x^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{20}=1$.

Př. 6: Najdi rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[3;-1]$ a jejíž asymptoty mají rovnice: $a_1: 3x-y-1=0$, $a_2: 3x+y-5=0$.

Podobný příklad jako předchozí. Střed hyperboly určíme jako průsečík asymptot:

- $a_1: 3x-y-1=0 \Rightarrow 3x=y+1$
- $a_2: 3x+y-5=0 \Rightarrow 3x=5-y$

Srovnáme obě rovnice: $y+1=5-y$.

$2y=4$

$y=2$

Dopočítáme *x*: $3x-y-1=3x-2-1=0$.

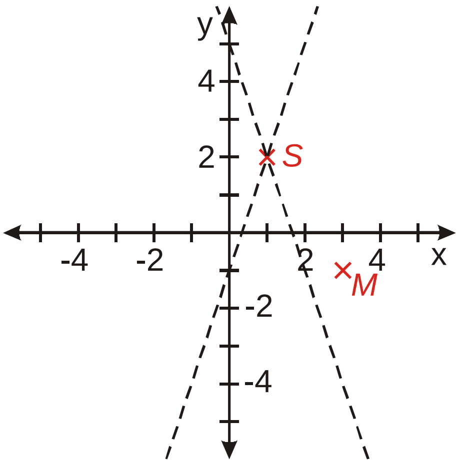
$x=1$

Hyperbola má střed v bodě $S[1;2]$.

Ze směrnic asymptot určíme poměr poloos: $k=3=\frac{b}{a} \Rightarrow b=3a$.

Zbývá určit, zda má hledaná hyperbola hlavní osu vodorovnou nebo svislou.

Nakreslíme si obrázek:



Z obrázku je vidět, že bod *M* leží napravo od asymptot $\Rightarrow$ hledaná hyperbola má hlavní osu vodorovnou $\Rightarrow$ rovnice $\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{(3a)^2}=1$.

Dosadíme bod $M[3;-1]$ a dopočítáme hlavní poloosu: $\frac{(3-1)^2}{a^2}-\frac{(-1-2)^2}{(3a)^2}=1$.

$\frac{4}{a^2}-\frac{9}{9a^2}=1 \quad /\cdot 9a^2$

$36-9=9a^2$

$a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$

$b=3a=3\sqrt{3}$.

Hledaná hyperbola má rovnici $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{27}=1$.

Př. 7: Petáková:
strana 126/cvičení 43
strana 126/cvičení 48
strana 126/cvičení 52
strana 126/cvičení 53

Shrnutí: